

2014학년도 목원대학교 수학교육과 1차 졸업시험

수 학

1차 시험	2교시 전공A	21문항 50점	시험 시간 90 분
<p>○ 문제지 전체 면수가 맞는지 확인하시오. ○ 문항의 문항에는 배점이 표시되어 있습니다.</p> <p>기입형 [1~15]</p> <p>1. 디너스(Dienes)는 자신의 학습이론을 구현하기 위한 효과적인 학습 원리를 제시하고 있다. 아래에서 제시하는 수학 학습 원리를 쓰시오.[2점]</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>개념의 성장을 돕기 위해 구조화된 경험을 제공하려면, 개념은 변하기 않게 유지하면서 가능한 한 많은 변인을 변화시켜야 한다.</p> </div> <p>2. 다음 교사의 의도에 적합한 평가 방법을 쓰시오.[2점]</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>ㄱ. 다른 교과 내용과의 연계성에 따른 수학적 가치의 인식이 가능하고 창의적 사고, 비판적 사고 등과 같은 보다 고차원적 사고 능력을 신장시키고자 한다.</p> <p>ㄴ. 소그룹 협동학습을 통해 학생들 자신이 속한 집단의 다른 구성원들과 이야기하거나 활동 결과를 학급 전체에 전달함으로써 의사소통 능력을 신장시키고자 한다.</p> <p>ㄷ. 스스로 문제를 찾고 이를 해결하기 위해 자신의 추론 능력이나 알고리즘을 사용하는 능력, 자신의 아이디어를 다른 사람에게 전달하는 능력을 평가하고 싶다.</p> </div>		<p>3. 다음 학생의 응답 내용을 근거로 볼 때, 반힐레(Van Hiele)의 기하학습수준에 따르면, 학생이 도달한 수준은 무엇이며, 그 수준의 특징을 간략히 쓰시오.[2점]</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>교사: (임의의 사각형을 그리고) 이 사각형의 내각의 합은 얼마일까요? 학생: 360도요. 교사: 정사각형이나 직사각형일 경우 90도가 4개가 되지만 지금 이 사각형은 정사각형도 직사각형도 아닌데 어떻게 360도라고 생각했지요? 학생: 사각형은 두 개의 삼각형으로 나누어지고 한 삼각형의 내각의 합은 180도라서요.</p> </div>	

4. 다음은 무한수열의 수렴에 관한 수업에 앞서 최 교사가 교과서와 교사용지도서를 분석하면서 기록한 내용이다.

① 교과서에서는 직관적이고 자연스러운 사고에 따라 무한수열의 수렴을 정의한다.

지난해에 ①과 같이 정의를 배운 학생들 중에 '1, 1, 1, ...'과 같은 상수수열이 수렴하지 않는다는 오개념을 갖는다.

위에서 최교사가 제시한 오개념의 원인을 ①과 관련하여 구체적으로 설명하시오.[2점]

5. 법 37에 관한 원시근은 2이다. 이 때 합동방정식 $x^7 \equiv -5 \pmod{37}$ 의 해를 구하시오. [2점]

6. 가환군 $\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{19}$ 의 원소 중 위수가 18인 것의 개수를 구하시오. [2점]

7. 복소수체 \mathbb{C} 위에서 3차 행렬 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ 를 대각화

하는 행렬 P 를 구하시오. [2점]

8. 거듭제곱급수(멱급수, power series) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{\sqrt{2n+3}}$ 이

수렴하도록 하는 실수 x 값들의 집합을 구하시오. [2점]

9. 양의 실수 r 에 대하여 함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = \begin{cases} x^8 \sin \frac{1}{x^{2r}} + x^{3r} \cos x^4, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

함수 f 의 도함수 f' 이 $x=0$ 에서 연속이기 위한 필요충분조건을 r 에 대한 부등식으로 나타내시오. [2점]

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{2n}^{3n} x e^{2n^2 - nx - 1} dx$ 의 값을 구하시오. [2점]

11. 실수 전체의 집합 \mathbb{R} 의 위상 \mathcal{I} 를 하한위상이라 하고 \mathcal{I}_d 를 \mathbb{Z} 의 이산위상(discrete topology)이라 하자. 함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 5 \\ 2, & 5 \leq x < 10 \\ 3, & 10 \leq x \end{cases}$$

에 대하여 집합 A 를

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f: (\mathbb{R}, \mathcal{I}) \rightarrow (\mathbb{Z}, \mathcal{I}_d) \text{는 } x \text{에서 불연속}\}$$

이라 할 때, 집합 A 의 원소의 개수를 구하시오. [2점]

12. 좌표평면 \mathbb{R}^2 위에 곡선

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$

이 주어져 있다. 평면위의 임의의 점 $p = (x_0, y_0)$ 에서 곡선 C 까지 거리를 $d(p, C)$ 를

$$d(p, C) := \inf\{d_0(p, q) \mid q \in C\}$$

(단, d_0 는 \mathbb{R}^2 의 보통 거리를 의미한다.)으로 정의하였을 때, 점 $p_0 = (3, 0)$ 에 대하여 $d(p_0, C)$ 를 구하시오. [2점]

13. 3차원 유클리드 공간 \mathbb{R}^3 에서 비틀림률(torsion)과 곡률(curvature)이 각각 상수 $\tau, \kappa(\neq 0)$ 인 단위 속력 곡선 α 에 대하여, 곡선 β 를 다음과 같이 정의한다.

$$\beta(s) = \frac{1}{\kappa} \int_0^s \mathbf{M}(t) dt$$

여기서 $\mathbf{M}(t)$ 는 곡선 α 의 주법벡터장(단위주법벡터장, principal normal vector field, unit principal normal vector field)이다. 곡선 β 의 곡률 κ_β 를 구하시오. [2점]

14. 3차원 유클리드 공간 \mathbb{R}^3 에 놓인 회전면

$$M: \mathbf{x}(u, v) = (u^2 \cos v, u^2 \sin v, u) \\ (u \geq 0, 0 \leq v \leq 2\pi)$$

의 가우스 곡률(Gaussian curvature)의 최댓값을 구하시오. [2점]

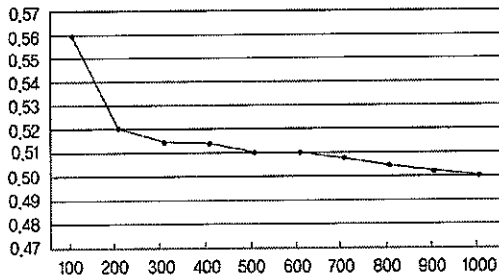
15. 어느 도시의 성인 중 10%가 A 통신사를 이용한다고 한다. 이 도시의 성인 100명을 임의로 조사할 때, A 통신사를 이용하는 성인이 8명 이상 14명 이하가 될 확률을 이항분포의 정규근사를 이용하여 구하면 $P(k_1 \leq Z \leq k_2)$ 이다. k_1 과 k_2 를 구하시오. (단, Z 는 표준정규분포를 따르는 확률변수이고 연속성 보정은 하지 않는다.) [2점]

서술형 [1~6]

1. 박교사는 다음과 같이 중학교 '확률의 뜻'에 대해 수업하였다. [3점]

다음은 한 개의 동전을 여러 번 반복하여 던졌을 때, 앞면이 나온 횟수를 조사하고 그 상대 도수를 구하여 표와 그래프로 나타낸 것이예요.

던진 횟수	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
앞면이 나온 횟수	56	104	154	205	255	306	355	403	452	500
앞면이 나온 상대도수	0.5600	0.5200	0.5133	0.5125	0.5100	0.5100	0.5071	0.5038	0.5022	0.5000



그래프에서 보이듯이 동전을 던진 횟수가 많아질수록 상대도수는 일정한 값 0.5에 가까워지고 있지요.

이와 같이, 같은 조건 아래에서 실험이나 관찰을 여러 번 되풀이 할 때, 어떤 사건 A가 일어나는 상대도수가 일정한 값에 가까워지면 이 일정한 값을 사건 A가 일어날 확률이라고 합니다.

위와 같이 확률 개념을 직관적으로 도입할 경우, 학생들은 확률에 대한 오개념을 가질 수 있다. 위에서 확률에 대한 오개념을 가질 수 있는 부분을 찾아 관련된 오개념 설명한 후, 오개념을 갖는 학생에게 확률 개념을 지도할 수 있는 방안을 제시하시오.[3점]

2. 실수체 \mathbb{R} 위에서 2차 이하의 다항식 벡터공간

$$P_2 = \{a + bx + cx^2 : a, b, c \in \mathbb{R}\} \text{ 위의}$$

선형사상 $T: P_2 \rightarrow P_2$ 가 다항식의 도함수(미분)로 주어졌다. 이때 P_2 의 한 기저 $B = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ 에 관한 행렬 $[T]_B$ 를 구하고, $(P_2, +, \cdot)$ 을 환으로 보았을 때 T 가 환 준동형사상(ring homomorphism)이면 증명하고 아니면 반례를 들으시오. [4점]

3. 연속함수 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대해 집합 $\{f(x) | x \in [0, 1]\}$ 의 상한(최소상계, supremum, least upper bound) M 이 존재한다. <정리1>을 증명 없이 이용하여 $f(x^*) = M$ 을 만족하는 $x^* \in [0, 1]$ 이 존재함을 증명하시오. [4점]

<정리 1>

유계인 실수열은 수렴하는 부분수열을 갖는다.

4. 실수 전체의 집합 \mathbb{R} 에 세 종류의 위상 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$ 을

$\mathcal{T}_1 = \mathbb{R}$ 의 보통위상(usual topology)

$\mathcal{T}_2 = \mathbb{R}$ 의 하한위상

$\mathcal{T}_3 = \mathbb{R}$ 의 여유한위상

이라 하자. 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_i)$ 에서 폐구간 $[0, 1]$ 의 내부(interior)를 각각 $A_i (i=1, 2, 3)$ 이라 할 때, 집합 $(A_1 - A_2) \cup A_3$ 을 구하시오. [3점]

5. 두 연속확률변수 X 와 Y 의 결합확률밀도함수(joint probability density function) $f(x, y)$ 를

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{5}xy(1-x+y), & 0 < x < 1, 1 < y < 3 \\ 0, & \text{그 외의 경우} \end{cases}$$

라 하자. Y 의 주변확률밀도함수(marginal probability density function) $f_Y(y)$ 를 구하고, 이를 이용하여 $Y=2$ 가 주어졌다는 가정하에 X 의 조건부확률밀도함수(conditional probability density function) $f_{X|Y}(x|2)$ 와 X 의 조건부기댓값(conditional expectation) $E[X|Y=2]$ 를 구하시오. [3점]

6. 빨강, 파랑, 초록, 노란색의 4가지 색깔의 사탕이 있다.

빨간색 사탕을 1개 이상 5개 이하로 선택하며 사탕 n 개 (n 은 자연수)를 선택하는 개수를 a_n 이라 하자. 이 때 a_n 의 생성함수 $f(n)$ 을 구하고, 이를 이용하여 a_{12} 를 구하시오. [3점]

<수고하셨습니다.>

2014학년도 목원대학교 수학교육과 1차 졸업시험

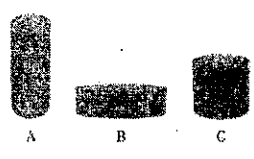
수 학

1차 시험	3교시 전공B	5문항 30점	시험 시간 90 분
-------	---------	---------	------------

- 문제지 전체 면수가 맞는지 확인하십시오.
- 문항의 문항에는 배점이 표시되어 있습니다

제출점 11-41

1. 함수를 표, 그래프, 식과 같이 표현하는 방식은 수치적인 특성이 있어서 함수 관계를 형식화하는데 도움이 된다. 특히 그래프는 표와 식에 비하면 아주 정확하지는 않지만 전체적인 개관을 통해 함수의 특성을 쉽게 파악할 수 있다.



왼쪽 그림과 같이 밑변의 반지름의 길이가 같고 서로 다른 원기둥 모양의 용기가 있습니다. 이 용기에 일정한 속력으로 물을 담을 때 높이의 변화에 대해 생각해 봅시다.

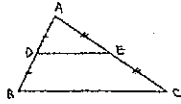
그래프를 의미 있게 사용하려면 여러 가지 접근 방식의 통합이 필요하다. 위의 상황을 그래프 학습과 관련하여, 먼저 여러 가지 용기에 물을 담을 때 물의 높이의 변화를 추측하게 한다. 그 다음 대략적으로 그래프를 그려보게 한 후 어떠한 활동을 하도록 하는 것이 바람직한지 설명하십시오.[3점]

2. 위상 \mathcal{I}_1 를 \mathbb{R} 의 하한위상이라 하고, \mathcal{I}_d 를 \mathbb{R} 의 보통위상이라 하자, 실함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여 다음 명제가 성립함을 보이고 그 역은 성립하지 않음을 설명하십시오.(단, \mathbb{R} 은 실수 전체의 집합이다.)[3점]

명제) $f: (\mathbb{R}, \mathcal{I}_d) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{I}_d)$ 가 연속이라면 $f: (\mathbb{R}, \mathcal{I}_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{I}_d)$ 또한 연속이다.

1. 다음은 이 교사가 중학교 2학년 학생을 대상으로 삼각형의 중점 연결 정리와 관련된 내용을 지도하는 수업의 일부이다. 다음을 읽고 물음에 답하시오. [10점]

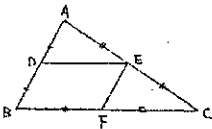
교사: 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 두 변 \overline{AB} , \overline{AC} 의 중점을 각각 D, E 라고 합니다. 그러면 \overline{DE} 와 \overline{BC} 는 어떻게 될까요?



수영: 서로 평행할 것 같습니다.

민희: \overline{DE} 가 \overline{BC} 의 반이 될 것 같습니다.㉠

교사: 그래요. 어느 것도 확실하지 않으니까 우선 \overline{DE} 가 \overline{BC} 의 반이 될 것 같다는 생각부터 확인해 봅시다. \overline{BC} 의 중점을 F하고 하면 $\triangle ADE \equiv \triangle EFC$ 가 되고, 따라서 $\overline{DE} = \overline{FC}$ 가 되니까 $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 가 되겠군요.



미연: 선생님, $\triangle ADE$ 와 $\triangle EFC$ 에서 $\overline{AE} = \overline{EC}$ 만 성립하지 다른 조건은 알 수 없으니까 이 두 삼각형은 합동이 라고 말할 수 없어요.㉡

교사: 그렇군요. 그러면 어떤 조건이 더 있어야 할까요?

수철: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 이면 $\angle AED = \angle C$ 가 됩니다.㉢

민희: 그렇지만 점 D와 E는 두 변의 중점이기 때문에 평행이 된다고 할 수는 없지 않나요?㉣

미연: 그러면 점 F를 \overline{BC} 의 중점이라고 하지 말고 $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ 가 되도록 점 F를 잡으면 어떨까요?㉤

교사: 미연이의 말대로 하면 두 삼각형이 합동이 될까요?

미연: 그러면 $\angle A = \angle FEC$ 가 되지만 두 삼각형이 합동이 되지는 않습니다.

수영: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 이면 좋을텐데...음...

교사: 이제 문제를 바꾸어봅시다. \overline{AB} 의 중점 D에서 \overline{BC} 에 평행인 직선을 긋고 \overline{AC} 와의 교점을 E라고 합시다. 그 다음에 E에서 평행인 직선을 그어 \overline{BC} 와의 교점을 F라고 합시다. 그러면 두 삼각형이 합동이 될까요?

수영: 예, 선생님 제가 증명해 보겠습니다.

위의 수업은 오류주의에 바탕을 두고 증명하는 과정을 통해 삼각형의 중점 연결 정리를 발견하도록 시도하고 있다. 오류주의에 입각하여 위의 대화에서 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤를 분석하시오. 그리고 2009 개정교육과정에서 '삼각형의 중점 연결 정리'와 관련하여 변화된 내용을 쓰고 '삼각형의 두 변의 중점을 연결하는 선분의 성질'을 직관적으로 이해하는 방식을 설명하시오.

<수고하셨습니다.>